

УТВЕРЖДАЮ

Директор Федерального государственного  
научного учреждения науки  
Институт Теоретической Физики им. Л.Д. Ландау  
Сыктывкарского филиала ИТФ РАН  
В.В. Лебедев  
2015



### Отзыв ведущей организации

на диссертацию Сапонова Павла Алексеевича

”Квантовые симметрии фундаментальных физических моделей”,

представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

по специальности 01.04.02 - теоретическая физика

Диссертация Сапонова П.А. посвящена изучению и развитию различных математических аспектов теории квантовых групп и алгебр, появляющихся в описании симметрий интегрируемых моделей двумерной квантовой теории поля с нетривиальной границей.

В квантовых теориях поля с факторизованным рассеянием двухчастичная матрица рассеяния должна удовлетворять так называемому уравнению треугольников. Для интегрируемости теории с границей (существования бесконечного числа коммутирующих интегралов движения в таких теориях) граничная матрица рассеяния также удовлетворяет дополнительному условию, уравнению отражений. Аналогичная картина возникает при описании точно решаемых двумерных решеточных моделей статистической механики, где больцмановские веса модели удовлетворяют уравнению Янга-Бакстера, а также граничному уравнению отражения.

Для описания физических величин, возникающих в таких точно решаемых теориях - корреляционных функций, форм факторов и т.д., в последние десятилетия активно развивался и использовался аппарат квантовых групп, для соответствующих решений уравнений Янга-Бакстера и уравнений отражения. Наиболее известные точно решаемые двумерные модели описываются постоянными и тригонометрическими решениями уравнения Янга-Бакстера (а модели

в решеточной статистической механике - также и эллиптическими решениями). В диссертации рассматривается случай, когда решения не зависят от спектрального параметра (быстроты). В данном простом случае теория (обычных) квантовых групп и их представлений развита наиболее хорошо и полно по сравнению с афинным и эллиптическим случаями. Что касается алгебр уравнений отражения, появляющихся в задачах с интегрируемой границей, то, несмотря на высокий интерес к таким моделям, все еще остается много неисследованных и трудных вопросов, часть из которых и изучается в данной диссертации. Алгебры уравнений отражения находят применение не только в теории квантовых систем с факторизованным рассеянием, но также в активно развивающейся в последние десятилетия некоммутативной геометрии, являющейся одной из перспективных областей, находящихся на стыке современной математики и различных направлений в теоретической физики. Это обеспечивает **высокую актуальность** точным и строгим результатам по широкому классу квантовых алгебр с отражением, представленных в диссертации.

Во **Введении** приведен краткий обзор темы диссертации, дано описание физической мотивации, сформулированы основные результаты, представленные к защите.

В **Первой** главе представлены новые результаты по теории квантовых матричных алгебр для наиболее важного и очень широкого класса суперсимметричных теорий  $GL(m|n)$  типа. Получен квантовый аналог тождества Гамильтона-Кэли. Изучены свойства соответствующей коммутативной характеристической подалгебры: построен базис в терминах аналогов функций Шура, для которых найдены правила Литтлвуда-Ричардсона. Изучены соотношения для произведений квантовых функций Шура, с помощью которых введено инвариантное определение спектра квантовой матрицы в  $GL(m|n)$  случае.

**Вторая** глава посвящена развитию теории представлений алгебры уравнения отражений, изучаемой в первой главе. Построена категория векторных пространств, объекты которой представляют собой конечномерные модули над алгеброй уравнения отражений. Найдена явная формула действия генераторов алгебры уравнения отражений в тензорном произведении модулей. Вычислен спектр центральных элементов алгебры в некоторых неприводимых представлениях. Изучена редукция от  $GL$  к  $SL$  случаю.

**Третья** глава содержит развитие теории квантовых алгебр уравнения отра-

жений в применении к некоммутативной геометрии. Квантовая алгебра уравнений отражения интерпретируется как двухпараметрическое квантование алгебры функций на матричной алгебре Ли  $gl(m)$ , отвечающее пучку согласованных скобок Пуассона (линейная скобка Пуассона-Ли и квадратичная скобка Семенова-Тянь-Шанского). Обе эти скобки ограничиваются на орбиты коприсоединенного действия группы  $GL(m)$  действующей на пространстве, двойственном к соответствующей алгебре Ли. Изучен вопрос квантования полупростых орбит.

**Четвертая** глава посвящена применению алгебр отражений к построению квантованных векторных полей и частных производных на алгебре уравнения отражений, трактуемой как алгебра квантовых функций на касательном пространстве к соответствующей алгебре Ли. Рассматривается конструкция инвариантных дифференциальных операторов, ограничение на квантовые орбиты. Развитая конструкция позволяют исследовать аналоги уравнений Шредингера, Клейна-Гордона и Максвелла на некоммутативных пространствах.

В приложениях диссертации собраны некоторые определения, дано изложение вспомогательных вопросов, приведен вывод технических комбинаторных тождеств, необходимых для доказательства утверждений в основном тексте. Имеются также **Заключение** и **Список литературы**.

Оценивая результаты диссертации в целом, хочется заметить, что работы, составившие ее основу (14 публикаций в высокоуровневых российских и международных журналах по математической и теоретической физике, входящих в систему Web of Science), посвящены изучению и технически, и принципиально сложных вопросов. Важно, что вычисления выполнены на высоком техническом уровне, а полученные результаты являются оригинальными, точными и математически строго доказанными. Первоначально, развитие данного направления (и квантовых групп вообще) было мотивировано интересом к детальному изучению алгебр нового типа, описывающих симметрии физически интересных точно решаемых моделей. Для изучения таких симметрий потребовалась разработка и развитие соответствующего нового математического аппарата. Проблемы, имеющие первоначально физическую мотивацию, привели к открытию глубоких новых математических структур и во многом оказались, со временем, на переднем крае развития соответствующих разделов математики - теории представлений, алгебраической геометрии и т.д. Нахождение строго дока-

занных утверждений и получение явных новых формул для широкого класса квантовых алгебр и их представлений, как это было, в частности, сделано в данной работе, является основой и важным шагом для более глубокого понимания математической структуры интегрируемых моделей. Кроме того, применения разработанных формул по алгебрам отражения к развитию некоммутативной геометрии, к изучению уравнений на некоммутативных пространствах выглядят интересными и перспективными. Результаты диссертации докладывались на международных конференциях, на семинарах ИФВЭ, ОИЯИ, ИТФ, университета Валансьена, института Макса Планка. Это подтверждает **научную новизну и актуальность** диссертации. Содержание работ и диссертации отражает **высокую квалификацию** соискателя в развитии математических методов теоретической физики.

Достоверность выводов диссертации следует из строгости и корректности математических доказательств с перекрестными и взаимодополняющими методами расчета.

В качестве замечаний можно отметить следующее.

1. При описании моделей квантовой теории поля с факторизованным рассеянием, возможно, было бы желательно привести ссылки на пионерские работы А.Б. Замолодчикова по интегрируемым теориям поля, уравнениям треугольников, точной солитонной квантовой матрице рассеяния и т.д. Данные работы, хотя и были сделаны до появления теории квантовых групп, во многом сформировали само направление точно решаемых квантовых теорий поля. Кроме того, в тексте встречаются явные формулы для уравнения Янга-Бакстера, R матрицы Джимбо. Однако ссылок на пионерские работы этих авторов нет. Возможно, в объемном диссертационном тексте имеет смысл процитировать работы, которые де-факто опускаются как общеизвестные в небольших по размеру статьях.
2. Термин "фундаментальный" в названии диссертации выглядит не совсем каноническим. По-видимому, более корректнее говорить о том, что речь идет об аналогах (деформациях, версиях на некоммутативном пространстве и т.д.) уравнений Шредингера, и т.д. Ведь нет уверенности, что эти, на самом деле важнейшие, уравнения останутся "фундаментальными" в их некоммутативной версии. В тексте и в автореферате термин разъясня-

ется, конечно.

3. Основу диссертации составляют исследования по алгебрам отражений, которые были мотивированы изучением соответствующих моделей с граничным рассеянием. Получены важные и глубокие математические результаты. Однако в исследовании нет явных применений новых результатов для вычисления физически важных наблюдаемых (корреляционных функций, форм факторов и т.д.) в каких-либо теориях рассеяния с интегрируемой границей, а результатом, по сути, является только изучение алгебры симметрий и дальнейшие применения для моделей, в которых важна некоммутативная геометрия.
4. Обозначения не всегда выбраны наиболее эффективным образом. Например, используются термины  $A_{n-1}$  и  $sl(m)$ ,  $GL(m)$  и  $GL(N)$ . Также нижний индекс в  $R$ -матрице  $R_1, R_q, R_{12}, R_k, R_{m|n}$  имеет разный смысл. При последовательном чтении это не вызывает проблемы, конечно, и не является существенным.

Отмеченные выше незначительные замечания не влияют на положительную оценку работы, а скорее подчеркивают сложность выбранной диссертантом проблемы получения глубоких математически строгих результатов для широкого класса квантовых алгебр, некоммутативной геометрии и их приложений.

Результаты, полученные автором диссертации, могут быть использованы в научных коллективах ведущих российских и зарубежных Институтов по данной тематике (ОИЯИ, ИФВЭ, МИ РАН, ПОМИ РАН, ИТФ РАН, СРТ (Марсель, Франция), Ун-та Мельбурна (Австралия), RIMS (Киото, Япония) и др. Выводы диссертации достаточно обоснованы. Работа отвечает требованиям п. 9. "Положения ВАК о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемым к докторским диссертациям", утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 № 842, а П.А. Салонов заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 - теоретическая физика.

Автореферат отвечает содержанию диссертации. Язык и стиль автореферата ясны и в меру лаконичны.

Результаты диссертации обсуждались на заседании Ученого Совета ИТФ

РАН 11.09.2015.

Отзыв составили

Главный научный сотрудник ИТФ РАН  
Руководитель сектора Квантовой Теории поля  
д.ф.-м.н, 01.04.02 - теоретическая физика,

Белавин Александр Абрамович

Старший научный сотрудник ИТФ РАН  
д.ф.-м.н, 01.04.02 - теоретическая физика,

Пугай Ярослав Петрович

ИТФ РАН, Черноголовка, Московская область, просп. Академика Семенова, д.  
1-А, 142432, Россия

Телефон: (+7 495) 702-93-17

Факс: (+7 495) 702-93-17

Электронная почта: office@itp.ac.ru

*Подписи Белавина А.А. и Пугая Я.П.  
Заверено*

*Ученый секретарь  
ИТФ им. Л.Д. Ландау РМ*



*И. Крашinsky*